

Roll No.

E-3771

B. Sc. (Part III) EXAMINATION, 2021

MATHEMATICS

(Optional)

Paper Third (B)

(Discrete Mathematics)

Time : Three Hours]

[Maximum Marks : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any *two* parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) समीकरण :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13$$

$0 \leq x_i \leq 5$, $i = 0$ से 5 तक, के सभी पूर्णांक हलों को ज्ञात कीजिए।

P. T. O.

Find the integer solutions of equation :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13$$

$$0 \leq x_i \leq 5, i = 0 \text{ to } 5.$$

(ब) सिद्ध कीजिए :

$${}^{2n+2}C_{n+1} = {}^{2n}C_{n+1} + 2 {}^{2n}C_n + {}^{2n}C_{n-1}$$

Prove that :

$${}^{2n+2}C_{n+1} = {}^{2n}C_{n+1} + 2 {}^{2n}C_n + {}^{2n}C_{n-1}$$

(स) प्रायिकता का गुणन नियम लिखिये एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove multiplicative law of probability.

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) सिद्ध कीजिए कि 1,00,000 व्यक्तियों में कम से कम दो व्यक्ति ऐसे हैं जिन्होंने ठीक एक समय (घंटा, मिनट, सेकण्ड) में जन्म लिया है।

Prove that among 1,00,000 people, there are at least two who were born at exactly the same time (hour, minute and second).

- (ब) यदि समुच्चय A में R एक तुल्यता सम्बन्ध है, तो सिद्ध कीजिए कि R^{-1} भी समुच्चय A में एक तुल्यता सम्बन्ध है।

Prove that if R is an equivalence relation on a set A, then prove that R^{-1} is also an equivalence relation on A.

(स) एक ग्राफ $G = (V, E)$ दिया हुआ है, जिसमें :

$$V = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$$

$$E = \{(V_1, V_2), (V_1, V_5), (V_2, V_3), (V_2, V_4)$$

$$(V_3, V_4), (V_3, V_5), (V_4, V_5)\}$$

उपर्युक्त ग्राफ की आसन्नता व आपतन आव्यूह ज्ञात कीजिए।

The following graph $G = (V, E)$, where :

$$V = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$$

$$E = \{(V_1, V_2), (V_1, V_5), (V_2, V_3), (V_2, V_4)$$

$$(V_3, V_4), (V_3, V_5), (V_4, V_5)\}$$

is given. Find the adjacency and incidence matrix of the above graph.

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) $a * b$ का निर्धारण कीजिये, जहाँ :

$$a_r = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq 2 \\ 0, & r \geq 3 \end{cases}$$

$$b_r = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq 2 \\ 0, & r \geq 3 \end{cases}$$

Determine $a * b$, where :

$$a_r = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq 2 \\ 0, & r \geq 3 \end{cases}$$

$$b_r = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq 2 \\ 0, & r \geq 3 \end{cases}$$

- (ब) जनक फलन की सहायता से निम्नलिखित श्रेणी का योगफल ज्ञात कीजिए :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + r^2.$$

Using generating functions, evaluate the sum of the following series :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + r^2.$$

- (स) दर्शाइये कि भाषा :

$$L = \{a^k b^k : k \geq 1\}$$

एक परिमित अवस्था भाषा नहीं है।

Show that the language :

$$L = \{a^k b^k : k \geq 1\}$$

is not a finite state language.

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) निम्नलिखित अंतर समीकरण को हल कीजिए :

$$4a_r - 20a_{r-1} + 17a_{r-2} - 4a_{r-3} = 0$$

Solve the following difference equation :

$$4a_r - 20a_{r-1} + 17a_{r-2} - 4a_{r-3} = 0$$

- (ब) जनक फलन विधि द्वारा निम्नलिखित अंतर समीकरण को हल कीजिए :

$$a_r - 5a_{r-1} + 6a_{r-2} = 2^r + r, \quad r \geq 2$$

दिये गये परिसीमा प्रतिबन्ध हैं :

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 1$$

Solve the following difference equation by method of generating function :

$$a_r - 5a_{r-1} + 6a_{r-2} = 2^r + r, \quad r \geq 2$$

with the boundary condition :

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 1.$$

- (स) सिद्ध कीजिए कि एक समूह G के किसी परिमित उपसमुच्चय H के एक उपसमूह होने के लिए आवश्यक व पर्याप्त प्रतिबन्ध यह है कि H , ग्रुप G की द्विचर संक्रिया के अन्तर्गत संवृत होना चाहिए।

Prove that the necessary and sufficient condition for a finite subset H of a group G to be a subgroup that is H must be closed under the binary operation of group G .

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) बूलीय बीजगणित का प्रयोग करके निम्नलिखित सर्वसमिका सिद्ध कीजिए :

$$abc + abc' + ab'c + a'bc = ab + bc + ca$$

By using Boolean Algebra, prove the the following statement :

$$abc + abc' + ab'c + a'bc = ab + bc + ca$$

- (ब) बूलीय बीजगणित $(B, \vee, \wedge, ')$ में किन्हीं दो अवयवों a तथा b के लिये सिद्ध कीजिए कि :

(i) $(a \vee b)' = a' \wedge b'$

(ii) $(a \wedge b)' = a' \vee b'$

For any two elements a and b in a Boolean algebra $(B, \vee, \wedge, ')$, prove that :

$$(i) \quad (a \vee b)' = a' \wedge b'$$

$$(ii) \quad (a \wedge b)' = a' \vee b'$$

(स) स्विचन फलन :

$$F(x, y, z) = xyz + xyz' + x'y'z' + x'y'z$$

को सरलीकृत स्विचन परिपथ से प्रतिस्थापित कीजिए।

Find the simpler switching circuit for the following switching function :

$$F(x, y, z) = xyz + xyz' + x'y'z' + x'y'z$$